

## **Программа вступительного испытания для переводящихся на программу бакалавриата ВШМ «Фундаментальная математика»**

### **Информация об экзамене**

Экзамен проводится письменно онлайн с использованием системы прокторинга. Состоит из шести задач: две по алгебре, две по геометрии, две по анализу. Продолжительность экзамена 180 минут.

### **Программа экзамена**

#### **Алгебра**

- Абелевы группы, кольца, поля. Гомоморфизмы и изоморфизмы. Примеры: целые, рациональные, действительные и комплексные числа, многочлены, кольца и поля вычетов, конечные поля, кольца и поля формальных степенных рядов.
- Евклидовы кольца, НОД, алгоритм Евклида. Простые и неприводимые элементы. Основная теорема арифметики. Идеалы: простые, максимальные, главные. Факториальные кольца, кольца главных идеалов. Китайская теорема об остатках.
- Векторные пространства: базис, размерность, подпространства, двойственное пространство, линейные преобразования, матрицы, определители, алгебры. Системы линейных уравнений, метод Гаусса. Собственные вектора и собственные значения, характеристический и минимальный многочлены, критерий диагонализируемости оператора, теорема Гамильтона-Кэли.
- Многочлены: корни, неприводимые многочлены над  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  (основная теорема алгебры), неприводимые многочлены над  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Z}$ , лемма Гаусса. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах. Результант, дискриминант, теорема Безу.
- Начала теории групп: смежные классы, теорема Лагранжа, нормальные подгруппы, фактор-группы, теорема о гомоморфизмах. Задание групп образующими и соотношениями. Группы симметрий. Действия групп на множествах, орбиты и стабилизаторы. Прямые и полупрямые произведения. Теоремы Силова.

#### **Геометрия**

- Линейные пространства: линейная зависимость. Базис. Размерность. Пересечение и сумма подпространств, их размерности. Координаты вектора. Закон изменения координат при замене базиса. Ориентация.

- Аффинные пространства: определение, подпространства, системы координат. Прямые и плоскости в  $\mathbb{A}^2$  и  $\mathbb{A}^3$ .

- Евклидовы пространства: неравенство Коши Буняковского, неравенство треугольника. Ортогональные системы векторов, ортонормированные базисы. Ортогонализация Грама-Шмидта. Ортогональные и унитарные матрицы.  $QR$ -разложение. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая. Угол между вектором и подпространством. Аффинные евклидовы пространства. Расстояние от точки до подпространства. Расстояние между подпространствами. Определитель матрицы Грама и многомерный объём. Векторное произведение. Формулы для расстояний в  $\mathbb{A}^2$  и  $\mathbb{A}^3$ . Метод наименьших квадратов.

- Линейные операторы, изоморфизмы, линейная группа. Ортогональные (изометрические) операторы, ортогональная группа. Ортогональные операторы как композиции отражений и поворотов. Параметризация группы  $SO(3)$  углами Эйлера и кватернионами. Аффинные преобразования, аффинная группа. Аффинные изометрии (движения), классификация движений плоскости и трёхмерного пространства.

### Математический анализ

- Множества, мощности, упорядоченные множества. Аксиома выбора и лемма Цорна.

- Вещественные числа, пределы последовательностей,  $O$  большое и  $o$  малое.
- Непрерывные функции, производные, выпуклые функции. Формула Тейлора.
- Нормированные, метрические и топологические пространства.

Компактность, связность, отделимость.  $p$ -адические числа,  $l^2$ .

- Ряды, интегралы, виды сходимости. Формула Стирлинга, гармонические числа, гамма-функция и бета-функция.

### Рекомендуемая литература

1. Э. Б. Винберг, Курс алгебры, М: Факториал 1999.
2. А. Л. Городенцев, Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть I.
3. Т.Е. Панов, Геометрия. Конспект лекций (ссылка: [https://mccme.ru/media/filer\\_public/5c/06/5c06b864-136d-4f57-8562-f366cc333333/panov-geometry.pdf](https://mccme.ru/media/filer_public/5c/06/5c06b864-136d-4f57-8562-f366cc333333/panov-geometry.pdf))
4. В. А. Зорич, Математический анализ, М: МЦНМО, 2007.
5. С.М. Львовский, Лекции по математическому анализу.